Acta Cryst. (1953). **6**, 217

Der Teilchenstrom bei Raumgitterinterferenzen von Materiewellen.

Von M. v. Laue,
Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Faradayweg 4–6, Berlin-Dahlem, Deutschland

(*Eingegangen am* 17. *November* 1952)

Bei Röntgenstrahlinterferenzen folgt, wie kürzlich gezeigt (Laue, 1952), der Energiestrom keinem der Wellenvektoren, welche dabei eine Rolle spielen, er setzt sich vielmehr vektoriell aus Summanden zusammen, deren jeder die Richtung eines solchen Wellenvektors hat, und dessen Betrag zur Stärke der zugehörigen Welle proportional ist. Dies liess sich aus dem Poyntingschen Satz ableiten, demzufolge die Stromdichte der Energie gleich dem Vektorprodukt aus beiden Feldstärken (im Lorentzschen Masssystem multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit) ist. Bei Materiewellen entspricht dem Energiestrom der Teilchenstrom. Schrödingers Theorie gibt für diesen eine allgemeine Formel, welche mit dem Poyntingschen Satze keinerlei Ähnlichkeit hat. Wir wollen zeigen, dass trotzdem die Bahn der Teilchen ähnlich dem Energiestrom bei Röntgenstrahlen verläuft.

Wir benutzen im Folgenden die dynamische Theorie der Raumgitter-Interferenzen, wie sie speziell für Elektronenwellen Bethe (1928) und in etwas anderer Form Lamla (1938*a*; *b*) gegeben haben. Sie setzt einen Idealkristall mit völlig ungestörter periodischer Wiederholung voraus. Für Neutronen, auf deren Beugung im Kristall sich das Folgende wohl am ehesten anwenden lässt, liegt darin die über die Bedingungen für die Röntgenstrahl-Interferenzen hinausgehende Forderung, dass jedes chemische Element im Kristall nur mit einer Atomart vertreten ist, dass es also keine Isotopen in ihm gibt. Ist diese Forderung wohl auch selten in den natürlichen Mineralien erfüllt, so enthält sie doch keine naturgesetzliche Unmöglichkeit, ja, die fortschreitende Kunst der Isotopentrennung stellt die künstliche Züchtung von Kristallen in Aussicht, die ihr genügen.

Der einfachste im Raumgitter mögliche Schwingungsvorgang ist das Wellenfeld, dargestellt durch die Schrödingerfunktion

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i E}{h} t\right] \mathbf{S}_m u_m \exp\left[-2\pi i (\mathfrak{K}_m \mathfrak{r})\right] .^* \quad (1)$$

Dabei ist E die Energie der Korpuskeln, die in Rede stehen, h das Plancksche elementare Wirkungsquantum. Die Wellenvektoren $\mathfrak{K}_m$ stehen mit den Vektoren $\mathfrak{b}_m$ des reziproken Gitters und mit dem einen von ihnen, $\mathfrak{K}_0$, in der Beziehung

$$\mathfrak{K}_m = \mathfrak{K}_o + \mathfrak{b}_m . \quad (2)$$

Die schon erwähnte Formel für die Stromdichte der Korpuskeln der Masse μ lautet:

$$\mathfrak{J} = \frac{h}{4\pi i \mu} [\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi] .^\dagger \quad (3)$$

* Die Summation nach m bedeutet eine dreifache Summation nach den Indices m_1, m_2, m_3 der Punkte des reziproken Gitters. $\mathfrak{K}_m$ ist der zugehörige Wellenvektor.

† i bedeutet die imaginäre Einheit, ψ^* ist zu ψ konjugiert komplex. Analog ist in (4) und (5) u^* zu u konjugiert.

Setzen wir hier den Wert (1) für ψ ein, so wird in Hinblick auf (2)

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= \frac{h}{2\mu} \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n u_m u_n^* (\mathfrak{K}_m + \mathfrak{K}_n) \exp\left[2\pi i ((\mathfrak{K}_n - \mathfrak{K}_m), \mathfrak{r})\right] \\ &= \frac{h}{2\mu} \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n u_m u_n^* (\mathfrak{K}_m + \mathfrak{K}_n) \exp\left[2\pi i ((\mathfrak{b}_n - \mathfrak{b}_m), \mathfrak{r})\right] . \quad (4)\end{aligned}$$

Danach wechselt der Strom innerhalb einer Raumgitterzelle Richtung und Stärke in schwer übersehbarem, aber auch nie beobachtbarem Masse. Für das Experiment kommt nur der räumliche Mittelwert in Betracht, genau wie beim Energiestrom der Röntgenstrahlen. Mittelung über die Zelle lässt aber, ganz wie im Fall der Röntgenstrahlen, alle Summanden in (4) verschwinden, ausgenommen diejenigen, für welche $m = n$ ist. Der beobachtbare Teilchenstrom ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\overline{\mathfrak{J}} = \frac{h}{2\mu} \mathbf{S}_m u_m u_m^* \mathfrak{K}_m . \quad (5)$$

Er setzt sich in der Tat zusammen aus Summanden, deren jeder die Richtung eines Wellenvektors $\mathfrak{K}_m$ hat und in seinem Betrage zur Stärke der entsprechenden Welle proportional ist. Gleichung (5) entspricht der Formel (9) der zitierten Arbeit über die Röntgenstrahlinterferenzen.

Nun lässt sich bei den Materiewellen das einzelne Wellenfeld ebensowenig unmittelbar erzeugen, wie bei den Röntgenstrahlen (siehe § 3 der oeben zitierten Untersuchung). Selbst wenn eine einzelne, monochromatische, ebene Welle auf die ebene Vorderfläche eines Kristalls fiele, entstände eine Mehrzahl durch ihre Vektoren unterschiedener, unter einander interferierender Wellenfelder; eine allgemeine Aussage über die Teilchenbahn wäre damit unmöglich. Aber der Versuch liefert niemals diese einzelne einfallende Welle vielmehr stets Strahlenbündel endlicher, wenn auch kleiner, Öffnung. Aber alle dadurch verursachten Komplikationen fallen für einen absorbierenden Kristall hinreichender Dicke fort, wenn in Analogie zu den Röntgenstrahlen die Absorption von Wellenfeldern anomal ist, sodass von allen zunächst entstehenden Wellenfeldern schliesslich nur das der kleinsten Absorption übrig bleibt. Dann muss sich die Teilchenbahn ähnlich einstellen, wie bei den entsprechenden, früher besprochenen Röntgeninterferenzen die Energiebahn (vergl. § 4 und § 6 der zitierten Arbeit).

Schrifttum

Bethe, H. (1928). *Ann. Phys., Lpz.* **87**, 55.
Lamla, E. (1938*a*). *Ann. Phys., Lpz.* **32**, 178.
Lamla, E. (1938*b*). *Ann. Phys., Lpz.* **32**, 225.
Laue, M. v. (1952). *Acta Cryst.* **5**, 619.